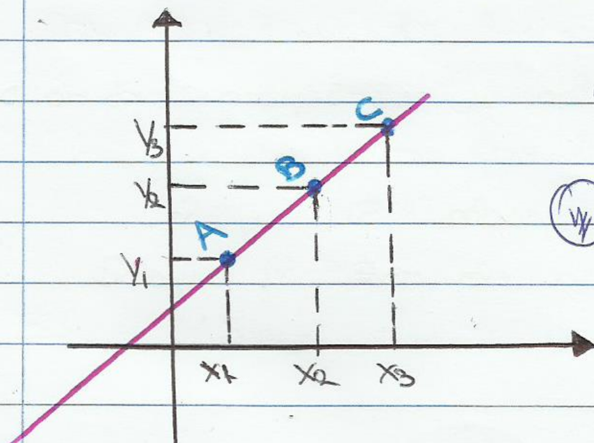
23/10/2018

3ο ΜΑΘΗΜΑ

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Ας θεωρήσουμε το καρτεσιανό επίπεδο $\mathbb{R}^2$ και ως ευθείες ορίζω υποσύνολα της μορφής: $\ell = \{ax+by=c : a^2+b^2 \neq 0\}$

- Έστω, $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$, $C(x_3,y_3)$ τρία συνευθειακά σημεία



- Ορίζω, ότι $A * B * C$ αν-ν

$x_2 \in (x_1, x_3)$ ή $x_2 \in (x_3, x_1)$

ή $y_2 \in (y_1, y_3)$ ή $y_2 \in (y_3, y_1)$

● Στο παράδειγμα : $f(x,y) = ax + by - c$

● $\mathbb{R}^2 - \{ l \} = P_f \cup N_f$

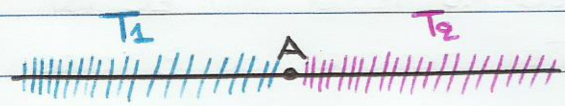
→ $P_f = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) > 0 \}$

→ $N_f = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) < 0 \}$

ΘΕΩΡΗΜΑ: Έστω, l μια ευθεία. Τότε, $S \setminus \{l\}$ χωρίζεται σε δυο συνιστώσες S_1, S_2 με $S_1 \cap S_2 = \emptyset$

Τα S_1, S_2: λέγονται ημιεπίπεδα με ακμή το l.

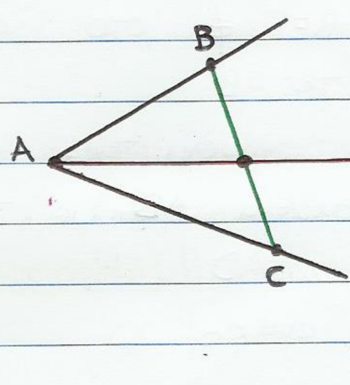
ΘΕΩΡΗΜΑ: Έστω, l: ευθεία και $A \in l \Rightarrow$ Το σύνολο $l - \{A\} = T_1 \cup T_2$ με $T_1 \cap T_2 = \emptyset$.



T_1, T_2: ημιευθείες με αρχή A.

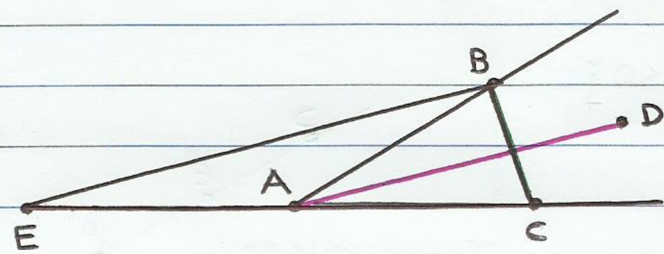
ΠΡΟΤΑΣΗ: Έστω, γωνία $\measuredangle BAC$ και σημείο D στο εσωτερικό της.

[Εσωτερικό γωνίας = Τομή δυο ημιεπιπέδων $\neq \emptyset$]



Τότε, η ημιευθεία (AD) : αρχή του A τέμνει το τμήμα BC

[ΑΠΟΔΕΙΞΗ]:



Έστω, E: σημείο στην AC ώστε $E * A * C$

Θα εφαρμόσουμε το αξίωμα Pasch στο τρίγωνο BEC και την AD.

Η ημιευθεία AD τέμνει την EC στο A

Η AD δεν περιέχει το B, ούτε το C

Αρκεί, ν.δ.ο η AD δεν τέμνει την BE.

Η BE έχει ένα και μόνο σημείο με την AB το B

* Άρα, όλα τα σημεία της BE (εκτός του B) είναι στο ίδιο ημιεπίπεδο με ακμή το AB.

Από κατασκευής το C είναι στο αντικείμενο ημιεπίπεδο.

και έτσι όλα τα σημεία της BE $\notin$ στο ίδιο ημιεπίπεδο με το C ως προς το AB.

Επιπλέον, πάλι από υπόθεση τα σημεία της AD $\in$ στο ίδιο ημιεπίπεδο προς την ευθεία AB με το C

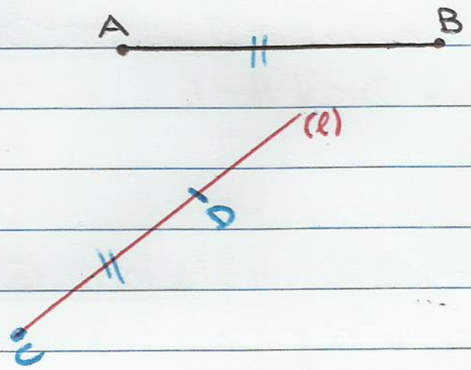
Άρα, η BE δεν τέμνει την AD

$\overset{\text{Pasch}}{\Longrightarrow}$ Η AD: τέμνει την BC σε σημείο D.

ΑΞΙΩΜΑΤΑ ΙΣΟΤΗΤΑΣ

- Υποθέτω, ότι $\exists$ μια σχέση ισότητας μεταξύ ευθυγράμμων τμημάτων.
- Αν δυο τμήματα AB και CD ΙΣΑ $\Rightarrow AB = CD$

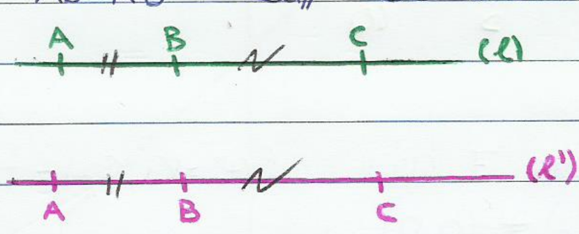
Ι1: Δοθέντος, ενός ευθυγράμμου τμήματος AB και μιας ημιευθείας ℓ με αρχή το σημείο C, υπάρχει μοναδικό D στην ℓ έτσι ώστε: $AB=CD$



Ι2: Αν $\left.\begin{array}{l} AB=CD \\ AB=EF \end{array}\right\} \Rightarrow CD=EF.$

Ι3: Έστω, τρία σημεία A,B,C επί μιας ευθείας με $A*B*C$ και 3 άλλα σημεία $A'*B'*C'$

Εάν, $AB=A'B'$ και $BC=B'C' \Rightarrow AC=A'C'$

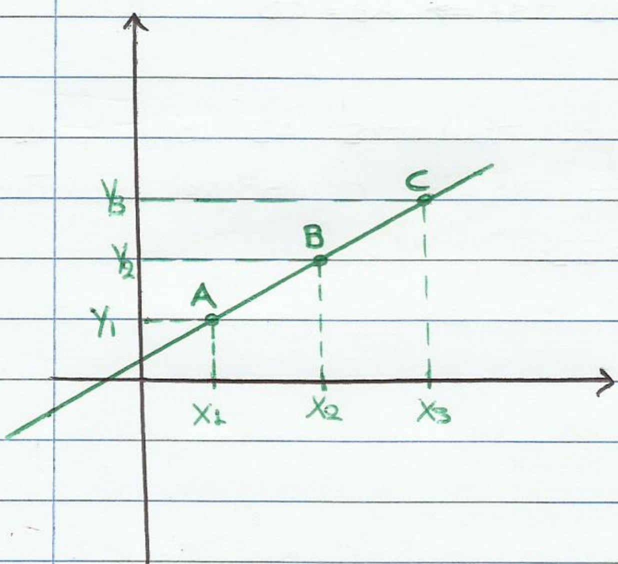


- Δηλ. η απόσταση να έχει προσθετική ιδιότητα.

Παρατήρηση: Η ισότητα ευθυγράμμων τμημάτων είναι σχέση ισοδυναμίας.

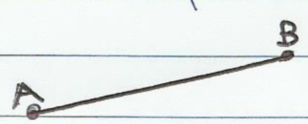
Παραδειγμα

Ας ορίσουμε, το $\mathbb{R}^2$, όπου οι ευθείες έχουν οριστεί με το συνήθη με το συνήθη τρόπο. Το ίδιο και η διάταξη



- Ορίζω, ως απόσταση των σημείων $A(a_1, a_2)$, $B(b_1, b_2)$ ως εξής:
$d(A,B) = |a_1 - b_1| + |a_2 - b_2|$

- I_1: Έστω, ότι $A(a_1, a_2)$, $B(b_1, b_2)$, $C(c_1, c_2)$ και μια ημιευθεία ℓ με αρχή το C



- Αναρωτιόμαστε, αν $\exists$ $D \in \ell$ έτσι, ώστε: $d(C,D) = d(A,B)$.

- Εφόσον, ℓ: δεδομένη $\exists$ (v_1, v_2): $\ell(t) = (c_1, c_2) + t(v_1, v_2)$, $t \geq 0$
Επίσης $(v_1, v_2) \neq (0,0)$
- Υπάρχει, $t_* > 0$: $d(\ell(t_*), c) = d(A,B)$;
- $d(A,B) = d(\ell(t_*), C) = |c_1 + t_* v_1 - c_1| + |c_2 + t_* v_2 - c_2|$

$$= t_* \{ |v_1| + |v_2| \}$$

$$\Rightarrow \quad t_* = \frac{d(A,B)}{|v_1| + |v_2|}.$$

● I_2 = Άμεσο.

● I_3: Ελέγχω, την προσθετική ιδιότητα.

→ Ας υποθέσουμε ότι A, B, C είναι 3-συνευθειακά : $A * B * C$

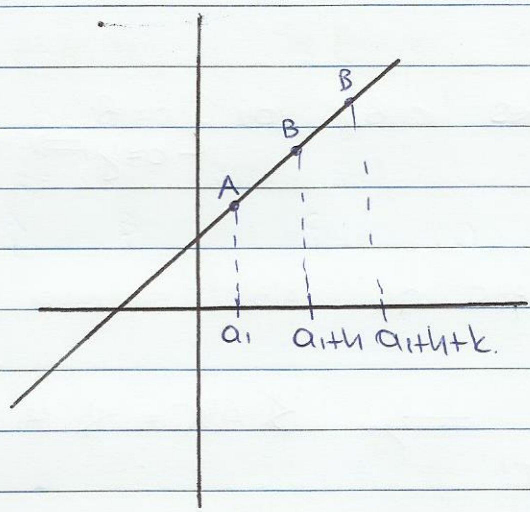
θδ.ο : $d(A,B) + d(B,C) = d(A,C)$.

● Ας υποθέσουμε, ότι : ℓ έχει εξίσωση $y = mx + b$

⇒ Τότε, $\exists\ h, k > 0$: $B(a_1 + h,\ a_2 + mh)$

$C(a_1 + h + k,\ a_2 + m(h+k))$

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} d(A,B) &= h + h|m| \\ d(B,C) &= k + k|m| \\ d(A,C) &= (h+k) + (h+k)|m| . \end{aligned}$$



ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: ● $A(-1,-1)$

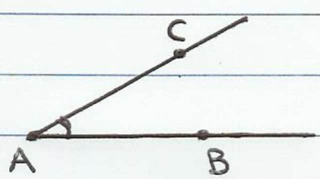
$B(0,0)$

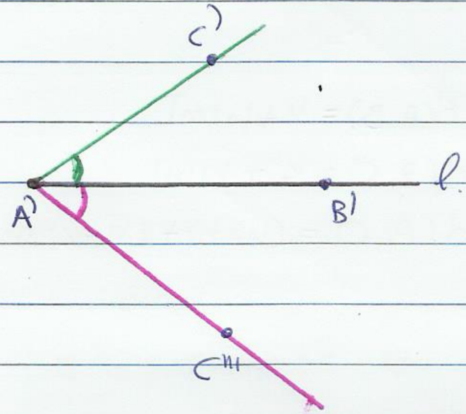
$\Gamma(2,1)$

Ζ→ ΑΞΙΩΜΑΤΑ ΓΩΝΙΩΝ ∢

- Ορίσαμε μια θέση ισότητας για τις γωνίες.

Ι4: Δοθείσας γωνίας με κορυφή το A $\sphericalangle BAC$ και μιας ημιευθείας $A'B'$ με αρχή το A' $\Rightarrow$ υπάρχει ημιευθεία $A'C'$ σε κάθε ημιεπίπεδο με ακμή την ευθεία $A'B'$: $\sphericalangle BAC = \sphericalangle B'A'C'$

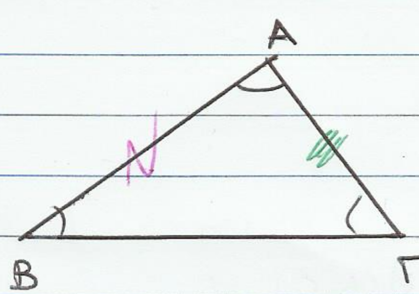


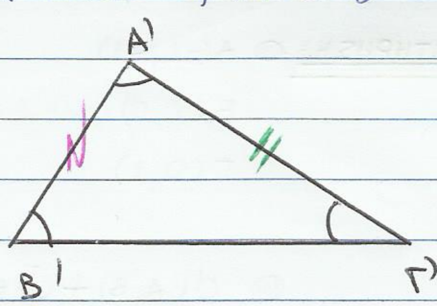


Ι5: Για 3 γωνίες α, β, γ αν $\begin{cases} \alpha = \beta \\ \alpha = \gamma \end{cases} \Rightarrow \beta = \gamma$

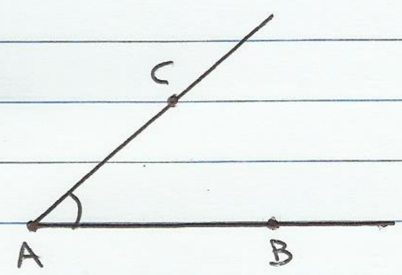
Ι6: Έστω ότι ABC και $A'B'C'$ τρίγωνα ώστε

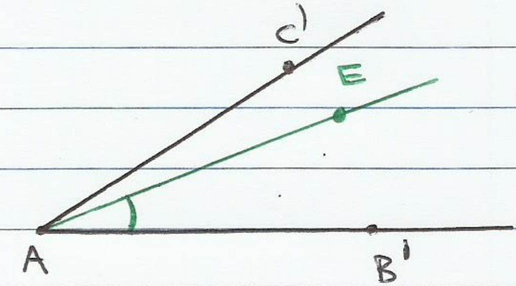
$$\begin{aligned} AB &= A'B' \\ AC &= A'C' \\ \sphericalangle BAC &= \sphericalangle B'A'C' \end{aligned} \longrightarrow \begin{aligned} \sphericalangle ABC &= \sphericalangle A'B'C' \\ \sphericalangle ACB &= \sphericalangle A'C'B' \end{aligned}$$





Ορισμός: Μια γωνία $\sphericalangle BAC$ λέμε ότι είναι μικρότερη της γωνίας $\sphericalangle B'A'C'$ όταν $\exists$ ημιευθεία $A'E'$ στο εσωτερικό της $\sphericalangle B'A'C'$: $\sphericalangle BAC = \sphericalangle B'A'E$

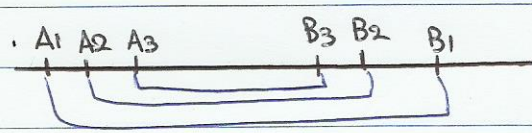




Αξιώματα Συνέχειας

Σ.1: Έστω, ότι A, B, A_1 : $A * A_1 * B$

Σ.2:



Σίγουρα, θα $\exists$ ένα σημείο που θα $\in$ στο πιο μικρό δ/στημα.